5/5/2017

Μια υποομάδα $H \leq G$, G ομάδα, καλείται κανονική και γράφουμε ότι $H \trianglelefteq G$ αν-ν:

(i) $\forall x \in G : xH = Hx$ αν-ν (ii) $(\forall x, y \in G)$ η πράξη $(xH)\cdot(yH) = (xy)H$ είναι καλά ορισμένη στο σύνολο πηλίκο $G/\sim_H$

Γνωρίζουμε επίσης ότι αν $H \trianglelefteq G$, τότε $G/\sim_H = G/{}_H\sim = G/H$

Πρόταση: Αν $H \trianglelefteq G$ τότε:

(1) Το σύνολο G/H εφοδιασμένο με την πράξη $xH \circ yH = (xy)H$ είναι ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο $eH = H$ και αντίστροφο του xH να είναι το $(xH)^{-1} = x^{-1}H$, $\forall xH \in G/H$

(2) Αν η ομάδα G είναι αβελιανή τότε και η G/H είναι αβελιανή

(3) Αν η ομάδα G είναι κυκλική τότε και η G/H είναι κυκλική

(4) Αν $|G| < +\infty$, τότε $|G/H| < +\infty$ με $|G/H| = [G:H]$

Απόδειξη: (1) $\forall xH, yH, zH \in G/H$, Θεωρούμε $xH \circ [(yH)\circ(zH)] = xH\,(yz)H$ $= ((x\circ y)\circ z)H = (x\circ y)H \cdot zH = ((xH)\circ(yH))\circ zH$

Ουδέτερο στοιχείο: $\forall xH \in G/H : (xH)\circ(eH) = (x\circ e)H = xH$ και επίσης $(eH)\circ(xH) = (e\circ x)H = xH$. Άρα $e_{G/H} = e_H = e$

Αντίστροφο στοιχείο: $(xH)\cdot(x^{-1}H) = (x\circ x^{-1})H = eH = H$ επιπλέον, $H = eH = (x^{-1}\circ x)H = (x^{-1}H)\circ(xH) \Rightarrow (x^{-1}H) = (xH)^{-1}$

Άρα, η $(G/H, \circ)$ είναι ομάδα.

(2) $\forall xH, yH \in G\backslash H \Rightarrow (xH)\cdot(yH) = (x\cdot y)H \xlongequal[G\text{: αβελιανή}]{} (yx)H =$
$= (yH)\cdot(xH)$. Δηλαδή δείξαμε ότι $(xH)\cdot(yH) = (yH)\cdot(xH)$
Άρα, αν G αβελιανή τότε και $G\backslash H$ αβελιανή, υπό την προϋπόθεση ότι $H \trianglelefteq G$.

(3) Αφού G είναι κυκλική, άρα $\exists a \in G: G = \langle a \rangle$. Θα δείξουμε ότι $\langle aH \rangle = G\backslash H$. Θεωρούμε δεδομένο ότι αν $x_1H, x_2H, \dots, x_kH \in G\backslash H$ τότε $(x_1H)\cdot(x_2H)\cdot\dots\cdot(x_kH) = (x_1\cdot x_2\cdot\dots\cdot x_k)H$. Ιδιαίτερα $\forall k \in \mathbb{N}: (xH)^k = x^kH$. Αν $k<0$, τότε $k=-n$ με $n>0$ και
$(xH)^k = (xH)^{-n} = x^{-n}H = x^kH$
Επομένως, $(xH)^k = x^kH$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.
$G\backslash H = \{xH \subseteq G \mid x \in G\} \xlongequal{G=\langle a \rangle} \{a^nH \subseteq G \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{(aH)^n \subseteq G \mid n \in \mathbb{Z}\}$
$= \langle aH \rangle$

Άρα $G\backslash H = \langle aH \rangle \Rightarrow G\backslash H$ κυκλική με γεννήτορα το aH.

(4) Από το Θεώρημα Lagrange $\Rightarrow |G| = |H|\cdot[G:H]$ και $[G:H] = |G\backslash H|$ άρα $[G:H] = |G\backslash H| = \dfrac{|G|}{|H|}$

Παράδειγμα: (1) Το αντίστροφο του (2) δεν ισχύει. Πράγματι, θεωρούμε την S_3 η οποία είναι μη-αβελιανή. Τότε η $H=\langle \rho_1 \rangle$ είναι μια κανονική υποομάδα της S_3 άρα ορίζεται η ομάδα πηλίκο $S_3/\langle \rho_1 \rangle$ και μάλιστα $|S_3/\langle \rho_1 \rangle| = \frac{|S_3|}{|\langle \rho_1 \rangle|} = \frac{6}{3} = 2$

Επομένως, η $S_3/\langle \rho_1 \rangle$ είναι αβελιανή.

(2) Το αντίστροφο του (3). Πράγματι, θεωρούμε την S_3 η οποία δεν είναι κυκλική. Τότε η $H=\langle \rho_1 \rangle$ είναι μια κανονική υποομάδα της S_3 άρα ορίζεται η ομάδα πηλίκο $S_3/\langle \rho_1 \rangle$ και μάλιστα $|S_3/\langle \rho_1 \rangle| = \frac{|S_3|}{|\langle \rho_1 \rangle|} = \frac{6}{3} = 2$. Όμως η $S_3/\langle \rho_1 \rangle$ είναι κυκλική.

(3) Το αντίστροφο του (4) δεν ισχύει. Πράγματι, αν $G=\mathbb{Z}$: άπειρη ομάδα και $H=\langle n \rangle = n\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}$. Άρα ορίζεται η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$. Τότε $|\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}_n| = n < +\infty$. Όμως $|\mathbb{Z}| = +\infty$.

(5) Να βρεθεί μια ομάδα G κάθε στοιχείο, εκτός του ουδετέρου, της οποίας έχει άπειρη τάξη, με G να περιέχει μια κανονική υποομάδα ώστε κάθε στοιχείο της ομάδας πηλίκο G/H να έχει πεπερασμένη τάξη και επιπλέον $|G/H| = +\infty$

Θεωρούμε τη $G=(\mathbb{Q},+)$ και $H=(\mathbb{Z},+)$. Τότε η G είναι μια άπειρη αβελιανή ομάδα κάθε στοιχείο της οποίας εκτός του ουδετέρου έχει άπειρη τάξη. Τότε $\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Q}$, άρα ορίζεται η ομάδα πηλίκο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}=\{x+\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \mid x\in \mathbb{Q}\}$, έστω $x+\mathbb{Z}\in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Τότε $x\in\mathbb{Q} \Rightarrow x=\frac{n}{m}$, $n,m\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$

Άρα $m\cdot\left(\frac{n}{m}+\mathbb{Z}\right) = \underbrace{\left(\frac{n}{m}+\mathbb{Z}\right)+\left(\frac{n}{m}+\mathbb{Z}\right)+\dots\left(\frac{n}{m}+\mathbb{Z}\right)}_{m\text{-φορές}}$

$$=\Big[\Big(\underbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\dots+\frac{n}{m}}_{m\text{-φορές}}\Big)+\mathbb{Z}\Big] = \left(m\cdot\frac{n}{m}+\mathbb{Z}\right) = n+\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$$

αφού $n\in\mathbb{Z}$. Άρα $o(x+\mathbb{Z})<+\infty \Rightarrow o(x+\mathbb{Z}) \mid m$

Όμως το $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ απεραντό, αφού περιέχει ένα απεραντο υποσύνολο. Πράγματι, έστω $\left\{\frac{1}{n}+\mathbb{Z}\in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$, τα στοιχεία του οποίου είναι ανά δύο διαφορετικά, ενώ θα είναι ίσα αν $n=m$

Όντως, αν $\frac{1}{n}+\mathbb{Z}=\frac{1}{m}+\mathbb{Z} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{m-n}{n\cdot m}\in\mathbb{Z}$

Θέτω $k=\frac{m-n}{n\cdot m} \Leftrightarrow k\cdot nm = m-n \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m=n(1+km) \\ n=m(1-kn)\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} n\mid m \\ \wedge \\ m\mid n\end{array}\right\} \Leftrightarrow n=m$

Άρα, οι πλευρικές τάξεις $\frac{1}{2}+\mathbb{Z}, \frac{1}{3}+\mathbb{Z}, \dots, \frac{1}{n}+\mathbb{Z}, \dots$ είναι τα άπειρα στοιχεία της ομάδας πηλίκο $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow |\mathbb{Q}/\mathbb{Z}|=+\infty$

Παρατήρηση: Κάθε ομάδα G περιέχει τουλάχιστον δύο κανονικές υποομάδες τις: $\{e\}, G$

Ορισμός: Μια ομάδα G καλείται απλή ομάδα αν-ν οι μόνες κανονικές υποομάδες της είναι: $\{e\}, G$

Παρατήρηση: Κάθε πεπερασμένη ομάδα δημιουργείται σε πεπερασμένα βήματα από απλές ομάδες

Θεμελιώδες πρόβλημα θεωρίας πεπερασμένων ομάδων: Ταξινόμηση όλων των πεπερασμένων απλών ομάδων.

- Πεπερασμένες απλές ομάδες
  - σποραδικές ομάδες
    - 26 ομάδες, η τάξη της μεγαλύτερης από αυτές είναι $8 \cdot 10^{53}$ (Monster)
  - μη-σποραδικές απλές ομάδες
    - ομάδες με τάξη πρώτο αριθμό (οι μόνες αβελιανές)
    - εναλλάσσουσες ομάδες A_n $n \geq 5$
    - Ομάδες Τύπου Lie

Πρόταση: Έστω G: ομάδα τότε:

(1) Αν $H \leq Z(G)$ ($\rightarrow$ $Z(G)$: κέντρο της $G = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}$)

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$ και επίσης: (α) $Z(G) \trianglelefteq G$

(β) Αν G: αβελιανή τότε κάθε υποομάδα της είναι αβελιανή.

(2) Αν $H \leq G$ και $[G:H] = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Απόδειξη: (1) Έστω $H \leq Z(G)$ και $x \in G$. Τότε $xH = \{xh \in G \mid h \in H\}$
$= \{h \cdot x \mid h \in H\} = Hx$. Άρα $Hx = xH \Rightarrow H \trianglelefteq G$.

Προφανώς, αφού αν $H \leq Z(G) \Rightarrow H \trianglelefteq G$. Τότε αν $H = Z(G)$
τετριμμένα έχουμε ότι $Z(G) \leq Z(G)$ και επομένως $Z(G) \trianglelefteq G$

(2) Αφού $[G:H] = 2 \Rightarrow$ ορίζεται το σύνολο $G - H \neq \emptyset$
Έστω $x \in G - H$. Τότε $x \in G \wedge x \notin H$. Άρα $H \neq xH$. Επίσης
$H \neq Hx$. Τότε $G = H \cup Hx = H \cup xH$.
Όμως αφού $G = H \cup Hx \Rightarrow Hx = G - H = xH$, αν $x \notin H$
Αν τώρα $x \in H$ προφανώς $xH = Hx = H$.
Άρα $\forall x \in G \Rightarrow xH = Hx \Rightarrow H \trianglelefteq G$

Παράδειγμα: (1) Υποομάδες της S_3: $\{i\}$, $\langle \mu_i \rangle$, $i=1,2,3$, $\langle \rho_1 \rangle$, $\langle \rho_2 \rangle$, S_3

Κανονικές υποομάδες της S_3: $\{i\}$, S_3, $\langle \rho_1 \rangle = \langle \rho_2 \rangle$, διότι $[S_3 : \langle \rho_1 \rangle] = 2$

(2) Q: μη αβελιανή ομάδα τάξης 8

Υποομάδες της Q: $\underbrace{\langle I_2 \rangle, \langle -I_2 \rangle}_{\text{τάξης } 2}$, $\underbrace{\langle I \rangle, \langle J \rangle, \langle K \rangle}_{\text{τάξης } 4}$, Q

Κανονικές υποομάδες της Q: $\{I_2\}$, Q, $\left.\begin{array}{l} \langle I \rangle \trianglelefteq Q \\ \langle J \rangle \trianglelefteq Q \\ \langle K \rangle \trianglelefteq Q \end{array}\right\}$ ως υποομάδες με δείκτη 2.

$\left.\begin{array}{l} \forall x \in Q : x\langle I_2 \rangle = x\{I_2, -I_2\} = \{x, -x\} \\ \text{και } \langle I_2 \rangle x = \{I_2, -I_2\}x = \{x, -x\} \end{array}\right\}$ Άρα η Q είναι μια μη-αβελιανή, της οποίας κάθε υποομάδα είναι κανονική.

Ομομορφισμοί Ομάδων: Αν G, G' ομάδες τότε μια απεικόνιση $\varphi: G \to G'$ είναι ομομορφισμός ομάδων $\Leftrightarrow \forall x, y \in G : \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Ο ομομορφισμός ομάδων καλείται:

(i) μονομορφισμός $\Leftrightarrow \varphi : 1-1$

(ii) επιμορφισμός $\Leftrightarrow \varphi$: επι

(iii) ισομορφισμός $\Leftrightarrow \varphi : 1-1$ και επι

Στοιχειώδεις ιδιότητες ομομορφισμών

Αν $\varphi: G \to G'$ ομομορφισμός τότε:

(1) $\varphi(e_G) = e_{G'}$

Απόδειξη: $\varphi(e_G) = \varphi(e_G \cdot e_G)$. Όμως $\varphi(e_G) = e_{G'} \cdot \varphi(e_G)$

Άρα, $\varphi(e_G) = \varphi(e_G \cdot e_G) = \varphi(e_G) \cdot \varphi(e_G)$ και

$\varphi(e_G) = e_{G'} \cdot \varphi(e_G)$. Τότε $\varphi(e_G) \cdot \varphi(e_G) = e_{G'} \cdot \varphi(e_G)$

$$\xrightarrow[\text{Διαγραφής}]{\text{Νόμος}} \varphi(e_G) = e_{G'}$$

(2) $\forall x \in G: \varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$

Απόδειξη:
$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) \cdot \varphi(x^{-1}) &= \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e_G) = e_{G'} \\ \varphi(x^{-1}) \cdot \varphi(x) &= \varphi(x^{-1} \cdot x) = \varphi(e_G) = e_{G'} \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ Άρα, $(\varphi(x^{-1})) = (\varphi(x))^{-1}$

(3) $\forall x_1, x_2, \ldots, x_k \in G: \varphi(x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \cdot \ldots \cdot \varphi(x_k)$

Απόδειξη: Με επαγωγή

(4) $(\forall x \in G)\ (\forall k \in \mathbb{Z}): \varphi(x^k) = (\varphi(x))^k$

Απόδειξη: Άμεσα από τα (2) και (3)

Παράδειγμα: (1) Αν G: ομάδα τότε η ταυτοτική απεικόνιση $Id_G: G \to G$, $Id_G = x$, $\forall x \in G$ είναι ισομορφισμός ομάδων (άρα και ομομορφισμός)

(2) Αν G, G' ομάδες και $\varphi: G \to G'$ με $\varphi(x) = e_{G'}$, $\forall x \in G$ τότε η φ είναι ομομορφισμός.

(3) Έστω $H \leq G$ τότε η απεικόνιση $i_H: H \to G$, $i_H(x) = x$, $\forall x \in H$ είναι προφανώς μονομορφισμός ομάδων (άρα και ομομορφισμός)

(4) Έστω $H \trianglelefteq G$. Τότε η απεικόνιση $\Pi_H: G \to G/H$ με $\Pi_H(x) = xH$ είναι επιμορφισμός ομάδων (δηλαδή ένας ομομορφισμός με Π: επι) διότε $\forall x, y \in G: \Pi_H(x \cdot y) = (x \cdot y)H = (xH) \cdot (yH)$
$= \Pi_H(x) \cdot \Pi_H(y)$
και άρα Π: επι

(5) Έστω η ομάδες $(\mathbb{R}, +)$ και $(\mathbb{R}^+, \cdot)$. Θεωρούμε την $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ με $\varphi(x) = e^x$ και την $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_e(x)$

Τότε $\forall x \in \mathbb{R}: g(\varphi(x)) = g(e^x) = \log_e(e^x) = x$
και $\forall y \in \mathbb{R}^+: \varphi(g(y)) = \varphi(\log_e(y)) = e^{\log_e(y)} = y$

Άρα, φ: 1-1 και επι με $\varphi^{-1} = g$. Τότε $\forall x, y \in \mathbb{R}: \varphi(x+y) = e^{x+y}$
$= e^x \cdot e^y = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \Rightarrow \varphi$: ομομορφισμός

$\forall x, y \in \mathbb{R}^+: g(x \cdot y) = \log_e(x \cdot y) = \log_e(x) + \log_e(y) = g(x) + g(y)$
$\Rightarrow g$: ομομορφισμός.

Άρα, φ: ισομορφισμός ομάδων με $\varphi^{-1} = g$